IKKI KARRALI INTEGRALNING MAPLE DASTURI YORDAMIDA YECHISHNING BA'ZI BIR USULLARI

Olimova Sevara Zokir qizi Chirchiq davlat pedagogika universiteti Matematika va informatika fukulteti magistranti sevaraxaitboyeva@gmail.com

Aktamov Feruz Sanaqulovich Chirchiq davlat pedagogika universiteti Matematika va informatika fakulteti Algebra va matematik analiz kafedrasi O'qituvchisi feruzaktamov28@gmail.com

Maqolada MAPLE matematik paketi yordamida karrali integrallarning tatbiqlariga doir misol va masalalar yechishi haqida fikr yuritilgan.

Tayanch so'zlar: MAPLE, ikki karrali integrallar, yuza, hajm, soha, grafik,og'irlik markazi

В статье обсуждается пример применения кратных интегралов и решения задач с помощью математического пакета MAPLE.

Ключевые слова: *MAPLE, двойные интегралы, поверхность, объём, площадь, граф, центр гравитации.*

In the article, an example of the application of multiple integrals and the solution of problems using the mathematical package MAPLE are discussed.

Key words: *MAPLE, double integrals, surface, volume, area, graph, center of gravity.*

• Matematik paketlar matematik ifodalarni yaratish, o'zgartirish, tahlil qilish va hisoblash imkoniyatini beradi. Ular matematik ifodalarni oddiy va tushunarli ko'rinishda ko'rsatadi, ularni matematik notatsiyasi bilan yozishga ruxsat beradi.

• Matematik paketlar matematik funksiyalar, tenglamalar sistemasi, differensial va integral hisob, matritsalar, vektorlar, to‘plamlar, algebralar, geometriyalar, topologiyalar, statistika, kombinatorika, kriptografiya va boshqa matematik sohalarni o‘rganish va yechish imkoniyatini beradi. Ular matematik nazariyalar va aksiomalar asosida ishlaydi hamda ularning natijalarini isbotlaydi.

• Matematik paketlar matematik ob’ektlarning grafikasini chizish, animatsiya yaratish, interaktiv oynalar ishlatish, matematik eksperimentlar o‘tkazish imkoniyatini beradi. Ular matematik ob’ektlarni ko‘z bilan ko‘rish va tushunishga yordam beradi.

• Matematik paketlar matematik masalalar va nazariyalar bilan bog‘liq ma’lumotlar va manbalar bilan ishlash imkoniyatini beradi. Ular matematik ma’lumotlar bazalarini, elektron kutubxonalarni, internet resurslarini va boshqa axborot vositalarini qo‘llab-quvvatlaydi.

Matematik paketlardan o‘quv jarayonida foydalanish matematik va texnik ta’limning fundamentalligini oshirishni ta’minlaydi. Talabalarning nazariy bilimlarini amaliyotga qo‘llash malakalarini oshiradi. Matematik paketlar matematika fanining go‘zalligini, chuqurligini va zamonaviyligini ko‘rsatadi.

Matematik paketlarga misol sifatida Maple, Matlab, Mathematica, Derive, Geo Gebra va boshqalar keltirilishi mumkin. Ular har biri o‘ziga xos imkoniyatlar va xususiyatlarga ega. Matematik paketlarni tanlashda, ularning maqsadga mosligi, foydalanish osonligi, narxining qulayligi va boshqa omillar hisobga olinadi. Matematik paketlarni o‘rganish va ishlatish uchun ularning rasmiy saytlaridan, elektron qo‘llanmalardan, video darsliklardan va boshqa manbalardan foydalanish mumkin.

Biz eng ko‘p qo‘llaniladigan matematik paketlardan biri Maple matematik paketi yordamida bir nechta misollarni yechamiz va ularni tahlil qilamiz.

Maple paketi matematik ifodalar bilan ishlash uchun keng imkoniyatlar beruvchi dasturiy vositadir. Ushbu paketda funksiyalar, matritsalar, algebraik ifodalar, trigonometrik ifodalar, integral va differensial hisoblar, grafiklar, animatsiyalar va

boshqa ko‘plab matematik ob’ektlar bilan ishlash mumkin. Maple paketi Windows, Linux, Mac OS X kabi operatsion tizimlarda ishlaydi. Maple matematik paketi matematikani o‘rganish, o‘qitish, qo‘llash va rivojlantirish uchun keng qamrovli hamda kuchli vosita hisoblanadi. U matematik ifodalar, tenglamalar, tengsizliklar formulasini yozish va ularni soddalashtirish, yechish, boshqa ko‘rinishga o‘tkazish, tekshirish, tahlil qilish, grafikasini chizish, animatsiya qilish, interaktiv qilish va boshqa ko‘plab amallarni bajarish imkonini beradi [1]. Maple matematik paketi yordamida siz matematik masalalar, misollar, mashqlar, testlar, loyihalar, eksperimentlar, tajribalar, o‘yinlar, tanlovlar, muammolar, olimpiadalar va boshqa turdagi matematik faoliyatlar bilan shug‘ullanishingiz mumkin [2]. Endi misollarning tahlili bilan tanishamiz.

Matematik analiz fanining muhim bo‘limlaridan biri karrali integrallar hisoblanadi. Karrali integral tekislikning ma’lum sohasida uch o‘lchovli yoki n o‘lchovli fazoda berilgan funksiyalardan olingan integral. Bu yerda talabalarda shunday muamo yuzaga keladiki, qandaydir D sohada aniqlangan ikki o‘zgaruvchili funksiyaning grafigini tassavur qilish va hosil bo‘lgan jismni doskada ifodalash bir muncha qiyinchiliklar tug‘diradi. Bunday hollarda, ayniqsa, uch o‘lchovli fazoda jismni tasvirlash uchun matematik paketlardan foydalanish samarali hisoblanadi [3]. Hozirgi kunda eng zamonaviy paketlardan biri MAPLE shu muammolarni hal qilishda muqobil yechim hisoblanadi. Dastlab, biz ikki karrali integralga ta’rif beramiz va ikki karrali integralni MAPLE matematik paketi yordamida yechishning bir nechta usullarini keltirib, ularga doir bir nechta misollar yechimlarini ko‘rsatamiz.

Ta’rif: Oxy tekislikning yopiq D sohasida $z = f(x, y)$ funksiya aniqlangan va bu uzluksiz bo‘lsin. D sohani ixtiyoriy ravishda umumiy ichki nuqtalarga ega bo‘lmagan va yuzalari ΔS_i ga teng bo‘lgan n ta D_i $(i = \overline{1,n})$ elementar sohalarga bo‘lamiz. Har bir D_i sohada ixtiyoriy $P(x_i; y_i)$ nuqtani tanlaymiz, $z = f(x, y)$

funksiyaning bu nuqtadagi qiymati $f(x_i, y_i)$ ni hisoblab, uni ΔS_i ga ko‘paytiramiz va barcha bunday ko‘paytmalarning yig‘indisini tuzamiz: $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ yig‘indiga $f(x, y)$ funksiyaning D sohadagi integral yig‘indisi deyiladi. [4]

D_i soha chegaraviy nuqtalari orasidagi masofalarning eng kattasiga shu yuzaning diametri deyiladi va d_i bilan belgilanadi, bunda $n \to \infty$ da $d_i \to 0$. Agar (1.1) integral yig‘indining $\max d_i \to 0$ dagi chekli limiti D sohani bo‘laklarga bo‘lish usuliga va bu bo‘laklarda $P(x_i; y_i)$ nuqtani tanlash usuliga bog‘liq bo‘lmagan holda mavjud bo‘lsa, bu limitga $f(x, y)$ funksiyadan D soha bo‘yicha olingan ikki karrali integral deyiladi va $\iint_D f(x, y)\, dS$ bilan belgilanadi:

$$\iint_D f(x, y)\, dS = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S, \text{ yoki,}$$

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \cdot y_i \text{ bo‘ladi. [5]}$$

1-misol: $x = 4y - y^2$, $x + y = 6$ chiziqlar bilan chegaralangan sohaning yuzini toping.

Birinchi navbatda berilgan chiziqlarning kesishish nuqtalarini topamiz. Bular $(4; 2)$ va $(3; 3)$ qiymatlar. Endi shundan foydalanib yuzani hisoblaymiz.

$Int(Int('(1)', x = 6 - y..4 \cdot y - y^2), y = 2..3) = \text{int}(\text{int}(1, x = 6 - y..4 \cdot y - y^2), y = 2..3);$

$$\int_2^3 \int_{6-y}^{3-y^2+4y} 1 dx dy = \frac{1}{6}$$

$$Int('(1)', x = 6 - y..4 \cdot y - y^2) = \text{int}('(1)', x = 6 - y..4 \cdot y - y^2);$$

$$\int_{6-y}^{-y^2+4y} 1dx = -y^2 + 5y - 6$$

simplify(*rhs*(%));

$$-y^2 + 5y - 6$$

Int(%, $y = 2..3$) = int(%, $y = 2..3$);

$$\int_2^3 (-y^2 + 5y - 6)\, dy = \frac{1}{6}$$

Demak, berilgan sohaning yuzi $\frac{1}{6}$ ga teng bo'lar ekan.

2-misol: $y = 1 + x^2$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$ sirtlar bilan chegaralangan I oktantadagi jismning hajmini hisoblang.

Hajmni hisoblash kerak bo'lgan jism yuqoridan $z = 3x$ tekislik, yondan $y = 1 + x^2$ parabolik silindr, $y = 5$ tekislik bilan chegaralangan. Shunga asosan masalani yechimini topamiz.

Int(*Int*('(3*x*)', $y = 1 + x^2..5$), $x = 0..2$) = int(int(3*x*, $y = 1 + x^2..5$), $x = 0..2$);

$$\int_0^2 \int_{1+x^2}^5 3x \; dxdy = 12$$

Int('(3*x*)', $y = 1 + x^2..5$) = int('(3*x*)', $y = 1 + x^2..5$);

$$\int_{1+x^2}^5 3x\, dx = 12x - 3x^3$$

simplify(*rhs*(%));

$$12x - 3x^3$$

$Int(\%, x = 0..2) = \text{int}(\%, x = 0..2);$

$$\int_0^2 (12x - x^3)\,dx = 12$$

Demak berilgan jism hajmi 12 ga teng bo'ladi.

3-misol: $y^2 = 4x + 4,\ y^2 = -2x + 4$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning og'irlik markazining koordinatalarini toping.

Chiziqlar OX o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun $\bar{y}_c = 0$ $\bar{x}_c$ ni topamiz.

$$Int(Int('(2)', x = \frac{y^2-4}{4}..\frac{4-y^2}{2}), y = 0..2) = \text{int}(\text{int}(2, x = \frac{y^2-4}{4}..\frac{4-y^2}{2}), y = 0..2);$$

$$\int_0^2 \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} 2\,dx\,dy = 8$$

$$Int('(2)', x = \frac{y^2-4}{4}..\frac{4-y^2}{2}) = \text{int}('(2)', x = \frac{y^2-4}{4}..\frac{4-y^2}{2});$$

$$\int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} 2\,dx = \frac{12-3y^2}{2}$$

$simplify(rhs(\%));$

$$\frac{12-3y^2}{2}$$

$Int(\%, y = 0..2) = \text{int}(\%, y = 0..2);$

$$\int_0^2 \left(\frac{12-3y^2}{2} \right) dy = 8$$

$$Int\left(Int\left('\left(\frac{1}{8}x \right)', x = \frac{4-y^2}{2} \ldots \frac{y^2-4}{4} \right), y = 0..2 \right) = \text{int}(\text{int}(\frac{1}{8}x, x = \frac{4-y^2}{2} \ldots \frac{y^2-4}{4}), y = 0..2);$$

$$\int_0^2 \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} \frac{x}{8} dx\, dy = \frac{2}{5}$$

$$Int\left('\left(\frac{1}{8}x \right)', x = \frac{y^2-4}{4} .. \frac{4-y^2}{2} \right) = \text{int}\left('\left(\frac{1}{8}x \right)', x = \frac{y^2-4}{4} .. \frac{4-y^2}{2} \right);$$

$$\int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} \frac{x}{8} dx\, dy = \frac{3}{8} - \frac{3}{16}y^2 + \frac{3}{128}y^4$$

simplify(*rhs*(%));

$$\frac{3}{8} - \frac{3}{16}y^2 + \frac{3}{128}y^4$$

$$Int(\%, y = 0..2) = \text{int}(\%, y = 0..2);$$

$$\int_0^2 \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{16}y^2 + \frac{3}{128}y^4 \right) dy = \frac{2}{5}$$

Bundan ko'rinadiki $\overline{x}_c = \frac{2}{5}$ ga teng bo'ladi va figuraning og'irlik markazining

koordinatalari $\left(\frac{2}{5};0\right)$ ga teng bo'ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Eshtemirov S., Aminov I.B., Nomozov F. Maple muhitida ishlash asoslari. Uslubiy qo'llanma. – SamDU, Samarqand, 2009.

2. Дяконов В.П. Maple 6: учебний курс. СПб.: Питер, 2001

3. Дяконов В.П. Математическая система Maple V R3/R4/R5. – М.: Солон, 1998.

4. Azlarov T., Mansurov H. Matematik analiz. Toshkent. "O'qituvchi" 1994.

5. Gaziyev A., Isroilov I., Yaxshiboyev M. Matematik analizdan misol masalalar. Toshkent. – 2021.