EHTIMOLLIKLAR NAZARIYASI AKSIOMALARI

Qarshi davlat texnika universiteti assistenti Muratova Baxora Baxodirovna.
baxoramuratova077@gmail.com +998991365111.

Annotatsiya. Ushbu maqolada ehtimollik nazariyasining asosiy aksiyomalari, ya'ni Kolmogorov aksiyomalari batafsil yoritilgan. O'rganishlar natijasida ehtimollikning o'zi va uning xossalarini aniqlashning fundamental prinsiplari ko'rsatilgan. Birinchi aksiyoma ehtimollikning nomanfiy qiymatga ega ekanligini va maksimal qiymatining 1 ga tengligini ta'kidlaydi. Ikkinchi aksiyoma butun olam (tajriba natijalari to'plami) ehtimolligini 1 ga teng deb belgilaydi. Uchinchi aksiyoma esa o'zaro hisob-kitobda teng imkoniyatli (ya'ni, bir vaqtda sodir bo'lishi mumkin bo'lmagan) hodisalar birlashmasining ehtimolligini har bir hodisaning ehtimoliyatlari yig'indisiga tengligini ko'rsatadi. Maqolada ushbu aksiyomalarning nazariy matematik asos sifatida ahamiyati, ularning ehtimollikni hisoblash va turli hodisalarning sodir bo'lish ehtimolini aniqlashda qo'llanilishi ko'rsatilgan.

Kalit so’zlar: Ehtimollik,aksiyomalar,kolmogorov aksiyomalari,hodisa,namuna fazosi,ehtimollik miqdori,matiomatiak asos,statistika,taqsimot.

Аннотация: В данной статье подробно рассматриваются основополагающие аксиомы теории вероятностей, известные как аксиомы Колмогорова. Исследования демонстрируют фундаментальные принципы, определяющие саму вероятность и ее свойства. Первая аксиома утверждает, что вероятность неотрицательна и ее максимальное значение равно 1. Вторая аксиома определяет вероятность полного пространства событий (множества всех возможных исходов) равной 1. Третья аксиома устанавливает, что вероятность объединения попарно несовместных (то есть не могущих

произойти одновременно) событий равна сумме вероятностей каждого из этих событий. В статье показано значение этих аксиом как теоретико-математического фундамента, их применение в расчете вероятностей и определении шансов возникновения различных событий.

Ключевые слова: Вероятность,аксиомы,аксиомы Колмогорова,событие,пространство элементарных исходов (или выборочное пространство),вероятностная мера,математическое основание,статистика,распределение

Annotation: This article elaborates on the fundamental axioms of probability theory, known as the Kolmogorov axioms. The research highlights the foundational principles that define probability itself and its properties. The first axiom states that probability is non-negative and its maximum value is equal to 1. The second axiom defines the probability of the entire sample space (the set of all possible outcomes) as 1. The third axiom establishes that the probability of the union of pairwise disjoint events (i.e., events that cannot occur simultaneously) is equal to the sum of the probabilities of each individual event. The article demonstrates the significance of these axioms as a theoretical mathematical foundation, their application in calculating probabilities, and in determining the likelihood of various events.

Keywords: Probability,axioms,Kolmogorov axioms,event,sample space,probability measure,mathematical foundation,statistics,distribution.

Natijalarini oldindan aytib berish mumkin bo‘lmagan tajribalarni matematik modellarini ko‘rish uchun birinchi navbatda elementar hodisalar fazosi tushunchasi kerak bo‘ladi (elementar hodisa tushunchasi boshlang‘ich (asosiy) tushuncha sifatida qabul qilinib unga ta’rif berilmaydi). Bu fazo sifatida ixtiyoriy Ω to‘plam qabul qilinib, uning elementlari ω lar $(\omega \in \Omega)$ elementar hodisalar deb e’lon qilinadi va bizni qiziqtiradigan harqanday natijalar shu elementar hodisalar bilan ifodalanadi.

Odatda eng sodda tajribalarda biz chekli sondagi elementar hodisalar bilan ish ko‘ramiz. Masalan, tanga tashlash tajribasi uchun $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}=\{G,R\}$ ikki elementar hodisa – tanganing G (gerb) tomoni yoki R (raqam) tomoni bilan tushish hodisalaridan iborat ekanligi bizga ma’lum. Kub tashlash tajribasida esa Ω 6 ta elementar hodisadan iborat. Lekin tanga va kub tashlash shunday tajribalar bilan bog‘liqki, ular uchun chekli sondagi elementar hodisalar bilan chegaralanib bo‘lmaydi. Masalan, 1.2-§ dagi misolni olsak, ya’ni tangani birinchi marta R (gerb) tomoni bilan tushishiga qadar tashlash tajribasini ko‘rsak, bu tajribaning elementar hodisalari $R,\ GR,\ \ldots,\ GG\ldots GR$ ketma–ketliklar ko‘rinishida bo‘lib, ularning soni cheksiz va ular bir-biridan farq qiladi. Tabiiyki, bu tajribani chekli sondagi elementar hodisalar (natijalar) fazosi bilan ifoda etib bo‘lmaydi.

Umuman Ω to‘plami chekli yoki sanoqli (diskret) bo‘lgan holda uning ixtiyoriy qismi (to‘plam ostisi) tasodifiy hodisa sifatida qabul qilinadi. Masalan, Ω to‘plam n ta elementar hodisalar $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n$ lardan iborat bo‘lsa, bu fazo (to‘plam) bilan bog‘liq

$$\{\omega_1\},\ \{\omega_2\},\ldots,\{\omega_n\},\ \{\omega_1,\omega_2\},\ldots,\{\omega_{n-1}\omega_n\},\ \ldots,\ \{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$$

2^n ta tasodifiy hodisalar sistemasi yuzaga keladi.

Yuqorida, 1.2-§ da elementar hodisalar to‘plami Ω diskret bo‘lgan holda ixtiyoriy tasodifiy hodisa sifatida Ω to‘plamning ixtiyoriy qismini olish kerakligini eslatib o‘tgan edik, demak F hodisalar sistemasi

$$F=\{A: A\subseteq\Omega\}.$$

F sistemada esa ehtimollik $P(\cdot)$ konstruktiv ravishda

$$P(A)=\sum_{\omega\in A}P(\omega)$$

tenglik bilan aniqlangan edi.

Lekin har qanday tajriba uchun hamma mumkin bo‘lgan natijalari (elementar hodisalari) sanoqli bo‘lmagan tajribalarni oson tassavur qilish mumkin. Masalan, $[t_1,t_2]$ oraliqda tasodifiy nuqtani tanlash tajribasini (ixtiyoriy kishining temperaturasini o‘lchashni) ko‘rsak, bu tajribaning natijalari kontinuum to‘plamni tashkil qiladi, chunki $[t_1,t_2]$ oraliqni ixtiyoriy nuqtasi elementar hodisa sifatida qabul qilinishi mumkin ($\Omega=[t_1,t_2]$). Bu holda Ω ning ixtiyoriy qismini (to‘plam ostisini) tasodifiy hodisa deb tushunsak, qo‘shimcha chalkashliklar yuzaga keladi va shu sababga ko‘ra, hodisalar sifatida Ω ning maxsus to‘plam ostilari sinfini ajratib olish bilan bog‘lik ehtiyoj yuzaga keladi. Umuman aytganda Ω ixtiyoriy to‘plam bo‘lganda, u bilan bog‘liq hodisalar sistemasini tuzish, Ω diskret bo‘lganda uning har qanday qismini hodisa deb tushunish imkoniyatini saqlab qolish maqsadga muvofiq bo‘ladi.

Aytaylik elementar hodisalar fazosi Ω ixtiyoriy to‘plam bo‘lib, F esa Ω ning qism to‘plamlaridan tashkil topgan sistema bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar quyidagi shartlar bajarilsa, F sistema algebra tashkil qiladi deymiz:

A_1: $\Omega\in F$;

A_2: Agar $A\in F$, $B\in F$ bo‘lsa, $A\cup B\in F$, $A\cap B\in F$ bo‘ladi ;

A_3: Agar $A\in F$ bo‘lsa, $\bar{A}=\Omega\setminus A\in F$ bo‘ladi.

Ravshanki, A_2 da keltirilgan ikkita munosabatdan bittasini talab qilinishi yetarli bo‘ladi, chunki ikkinchisi A_3 ni hisobga olgan holda doim bajariladi.

F algebrani ba’zi hollarda halqa deb ham qabul qilinadi, chunki F da qo‘shish va ko‘paytirish amallari mavjudki (to‘plamlar nazariyasi ma’nosida), ularga nisbatan F yopiq sistema bo‘ladi. F algebra birlik elementga ega bo‘lgan halqa deb tushunilishi mumkin, chunki $\Omega\in F$ ekanligidan har qanday $A\in F$ uchun

$A\Omega = \Omega A = A$ tenglik o‘rinli.

2-Ta’rif. To‘plamlar sistemasi F σ-algebra tashkil qiladi deymiz, agar ushbu xossa ixtiyoriy to‘plamlar ketma-ketligi uchun bajarilsa:

A_2'. Agar har qanday n uchun $A_n \in F$ bo‘lsa, u holda

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F \quad \text{bo‘ladi.}$$

Qayd qilib o‘tamizki, A_2 xossadagi kabi A_2' da ham keltirilgan 2 ta munosabatdan bittasini bajarilishi yetarli, chunki (ikkilik prinsipi)

$$\overline{\bigcap_n A_n} = \bigcup_n \overline{A_n}$$

tenglik o‘rinli. F – σ-algebra, σ-halqa yoki hodisalarning Borel maydoni deb ham yuritiladi.

Keltirilganlardan kelib chiqadiki, algebra chekli sonda bajariladigan to‘plamlarni qo‘shish, ko‘paytirish, to‘ldiruvchi to‘plamlarga o‘tish amallariga nisbatan yopiq bo‘lgan to‘plamlar sistemasi bo‘lar ekan. σ-algebra esa bu amallarni sanoqli sonda bajarilishiga nisbatan yopiq sistemadir.

Har qanday algebra σ-algebra bo‘lavermaydi. Masalan, $[0,1]$ kesmadagi chekli intervallardan tashkil topgan to‘plamlar sistemasi algebra bo‘ladi, lekin σ-algebra bo‘lmaydi.

Agar Ω to‘plam va uning to‘plamlaridan tuzilgan algebra yoki σ-algebra F berilgan bo‘lsa, (Ω, F) ***o‘lchovli fazo*** deyiladi. O‘lchovli fazo tushunchasi, to‘plamlar nazariyasi, o‘lchovlar nazariyasi va ehtimolliklar nazariyasida juda muhimdir. Quyidagi teoremaga asoslanib, o‘lchovli (Ω, F) fazolarni o‘rganishda F sistema σ-algebra tashkil qilgan holni qo‘rish bilan chegaralanib qolish yetarli ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Ω to‘plamning ixtiyoriy qismini ω-to‘plamlar deb

ataymiz.

Teorema. F_0 ixtiyoriy ω -to‘plamlar sistemasi bo‘lsin. U holda ω -to‘plamlarning shundek σ-algebrasi F mavjudki, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

I. $F_0 \subset F$;

II. Agar F_1 ω-to‘plamlarning σ-algebrasi bo‘lib, $F_0 \subset F_1$ bo‘lsa, u holda $F \subset F_1$.

I va II hossalardan kelib chiqadiki, har qanday ω-to‘plamlarning sistemasi uchun uni qoplovchi (o‘z ichiga oluvchi) minimal σ-algebra F mavjud bo‘lar ekan. Kelgusida bu σ-algebrani F_0 sistema hosil qilgan σ-algebra deymiz va $F = \sigma(F_0)$ deb belgilaymiz. σ-algebraning ta’rifidan kelib chiqadiki, $\sigma(F_0)$ning ixtiyoriy ω-to‘plami (hodisasi) A, shu F_0 sistemasining elementlaridan sanoqli sonda $\cup$, $\cap$ va to‘ldiruvchi to‘plamlarga o‘tish amallari orqali hosil bo‘lgan to‘plamlardan iborat bo‘ladi.

Teoremaning isboti sodda va konstruktiv xarakterga ega. Haqiqatan ham, σ-algebraning ta’rifidan ixtiyoriy sondagi σ-algebralarning ko‘paytmasi yana σ-algebra bo‘lishi kelib chiqadi. O‘z-o‘zidan tushunarliki, Ω to‘plamning hamma to‘plamostilaridan tuzilgan sistema σ-algebra tashkil qiladi va u F_{max} – maksimal σ-algebra deyiladi. Demak hech bo‘lmaganda bitta σ-algebra (F_{max}) borki, ω-to‘plamlarning ixtiyoriy sistemasi $F_0 \subset F_{max}$ bo‘ladi. Oxirgidan ko‘rinadiki F bo‘sh to‘plam emas va u berilgan F_0 sistemani o‘z ichiga oluvchi hamma σ-algebralarning ko‘paytmasidan iborat deb tushunish mumkin (o‘quvchiga mashq sifatida, agar Ω to‘plam sanoqli bo‘lsa, (Ω, F_{max}) asosiy o‘lchovli fazo bo‘lishini tekshirishni taklif etamiz). Keltirilgan mulohazalardan $\sigma(F_0) = F$ ni II banddagi xossasi kelib chiqadi.

Aytaylik, $\Omega = \mathbf{R}$ – haqiqiy sonlar to‘plami va F_0 – barcha intervallar sistemasi bo‘lsin. U holda $\mathcal{B} = \sigma(F_0)$ Borel σ-algebrasi deyiladi va $\mathcal{B}$ intervallarni o‘z ichiga oluvchi hamma σ-algebralarning ko‘paytmasi bo‘ladi (F hamma intervallarni o‘z ichiga oluvchi minimal σ-algebra). Borel σ-algebrasi F ni intervallar ustida sanoqli sonda qo‘shish, ko‘paytirish va to‘ldiruvchi to‘plamlarga o‘tish amallari orqali hosil bo‘lgan to‘plamlar sistemasi deb qarash mumkin va bunday to‘plamlar Borel to‘plamlari deyiladi. Masalan, (a,b) intervallar bilan bir vaqtda bir nuqtali to‘plamlar $\{a\}$ va $(a,b]$, $[a,b]$, $[a,b)$ (a va b lar chekli yoki cheksiz qiymatlarni qabul qilish mumkin) ko‘rinishidagi to‘plam Borel to‘plamlari bo‘ladi, chunki ular uchun

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right), \quad (a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a, b + \frac{1}{n}\right)$$

munosabatlar o‘rinli.

Ochiq va yopiq to‘plamlarning strukturasidan foydalanib aytishimiz mumkinki, agar F_0 $\mathbf{R}$ dagi yoki ochiq, yoki yopiq to‘plamlar sistemasi bo‘lsa, $\sigma(F_0) = \mathcal{B}$ (Borel σ-algebrasi) bo‘ladi va $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ o‘lchovli fazo bo‘ladi. Aytib o‘tilganlardan ko‘rinadiki, Borel σ -algebrasi $\mathcal{B}$ to‘g‘ri chiziqda juda ham boy to‘plamlar sistemasini tashkil qiladi (Borel to‘plami bo‘lmaydigan to‘plamlarga misol keltirish qiyin).

Agar n-o‘lchovli Evklid fazosi $\mathbf{R}^n$ ni ko‘rsak, undagi Borel to‘plamlari sistemasi $\mathcal{B}^n$ n-o‘lchovli to‘g‘ri to‘rtburchaklar (intervallar), sferalar sistemasi hosil qilgan σ-algebradan iborat bo‘ladi.

Umuman ehtimolliklar bilan bog‘liq biror masalani yechishda unga mos kelgan tajriba uchun (Ω, F) o‘lchovli fazoni qabul qilish kerak. Bunda Ω ko‘rilayotgan tajribaning elementar hodisalar (natijalar) to‘plami, F shu tajriba bilan bog‘liq hodisalar σ-algebrasi. F ga kirmaydigan Ω ning barcha to‘plamostilari hodisalar

hisoblanmaydilar. Ko‘pincha F sifatida konkret ma’noga ega bo‘lgan to‘plamlar sistemasi hosil qilgan σ-algebra qabul qilinadi.

Umuman, agar

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup ...$$

va har xil i va j lar uchun $A_j \cap A_j = \varnothing$ bo‘lsa, u holda $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ ω-to‘plamlar sistemasi Ω *to‘plamnihg bo‘linishi* deyiladi.

Ko‘p hollarda

$$F = \sigma(A_1, A_2, ..., A_n, ...)$$

deb olish maqsadga muvofiq bo‘ladi. Bu yerda qanday bo‘laklash sistemasini qabul qilish qo‘yilgan masalaning ma’nosiga bog‘liq.

Endi (Ω, F) o‘lchovli fazoda ehtimollik tushunchasi qanday kiritilganini eslatib o‘tamiz.

3-ta’rif. (Ω, F) o‘lchovli fazodagi ehtimollik $P(\cdot)$, F σ-algebraning to‘plamlarida aniqlangan sonli funksiya bo‘lib, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

P_1: Har qanday $A \in F$ uchun $P(A) \geq 0$.

P_2: $P(\Omega) = 1$.

P_3: Agar F ga tegishli hodisalar ketma-ketligi $\{A_n, n \geq 1\}$ uchun $A_i \cdot A_j = A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ bo‘lsa,

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

R_3 xossa ehtimollikning σ-additivlik xossasi deyiladi.

(Ω, F, P) uchlik *ehtimollik fazosi* deyiladi.

Ehtimollik P o‘lchovli (Ω, F) fazodagi taqsimot yoki yana soddaroq ravishda, Ω dagi taqsimot deb ham yuritiladi.

Shunday qilib, ehtimollik fazosi berilgan deganda, o‘lchovli fazoda sanoqli additiv, manfiy bo‘lmagan qiymatlarni qabul qiluvchi va hamma elementlar hodisalar to‘plamida 1 ga teng bo‘lgan o‘lchovni berish tushuniladi.

F σ-algebrani va unda P ehtimollikni aniqlaydigan A_1, A_2', A_3, P_1, P_2, P_3 aksiomalar birgalikda hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasining asosini tashkil etadi va ular XX-asrning mashhur matematigi A.N.Kolmogorov tomonidan kiritilgan.

Mantiqiy nuqtai nazardan, keltirilgan aksiomalar to‘la bo‘lmagan, qarama–qarshiliksiz aksiomalar sistemasini tashkil qiladi. (Ω, F, P) ehtimollik fazosini ko‘rish tasodifiy tajribalarning matematik modelini tuzishda asosiy rol o‘ynaydi.

Umuman «Ehtimollik o‘zi nima?» deb ataladigan munozara ancha katta tarixga ega. Bu tushuncha o‘rganilayotgan hodisaning bevosita zarurligi va tasodifiyligi bilan bog‘liq, faqatgina matematika nuqtai nazaridan emas, balki falsafaviy xarakterdagi qiyinchiliklarga ham olib keladi. Bu munozaraning yuzaga kelishi va rivojlanishi mashhur matematiklar E.Borel, R.Fon Mizes, S.N. Bernshteyn, A.N.Kolmogorovlar nomi bilan bog‘liq. Ehtimollik fazosi (Ω, F, P) ni aniqlovchi Kolmogorov aksiomalari “ehtimollikning” matematik ma’nosini “sabab va zaruriyat” kabi falsafiy tushunchalardan ajratib turadi.

Xulosa. Ushbu maqola ehtimollik nazariyasining fundamental asoslarini, ya'ni Kolmogorov aksiyomalarini chuqur tahlil qiladi. Ehtimollik nazariyasi hodisalar sodir bo'lishining noaniqligini matematik jihatdan o'rganish uchun zarur vositalarni taqdim etadi va bu fan turli sohalarda, jumladan fizika, iqtisodiyot, biologiya va kompyuter fanlarida muhim rol o'ynaydi. Maqolada Kolmogorovning uchta asosiy aksiyomasi – nomanfiylik, bitta hodisa ehtimolligining 1 ga tengligi va sanoqli algebraik birlashmalarning additivligi qat'iy ravishda bayon etilgan va tushuntirilgan. Ushbu aksiyomalar ehtimolliklar kattaliklarini aniqlash, ularning xossalarini isbotlash va murakkab ehtimoliy modellarini qurish uchun mustahkam poydevor yaratadi.

Ehtimollik nazariyasini matematik jihatdan asoslashda ushbu aksiyomalar hal qiluvchi ahamiyatga ega bo'lib, turli ehtimoliy jarayonlarni tadqiq qilish va ularning natijalarini bashorat qilish imkonini beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Montgomery D.C., Runger G.C. Applied Statistics and Probability for Engineers. Wiley, 2014.
2. Wackerly D., Mendenhall W., Scheaffer R. Mathematical Statistics with Applications. Cengage Learning, 2014.
3. Rice J.A. Mathematical Statistics and Data Analysis. Cengage Learning, 2006.
4. O’Connor P.D.T., Robertson S. Mathematical Statistics. Open University Press, 2005.