УДК 519.21

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МНОГОТИПНЫХ КРИТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ С ИММИГРАЦИЕЙ УБЫВАЮЩЕЙ ИНТЕНСИВНОСТИ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ СОСТОЯНИЯ

А. А. Имомов

imomov_azam@mail.ru

О. Ш.Рузибоева

oqilaruziboyeva2905@gmail.com

Каршинский государственный университет, г. Карши

Пусть $Z(t) = \left(Z_1(t), \dots, Z_n(t)\right)$, $t = 0,1,2, \dots$, — n -типный ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с матрицей математических ожиданий числа потомков $A = \left(a_{ij}\right)$, неразложимой, непериодичной и имеющей перроновский корень, равный единице (критический случай). В отличие от процессов с однородной иммиграцией, здесь иммиграция «включается» только при попадании процесса в состояние 0 и имеет интенсивность, убывающую со временем: производящая функция числа иммигрантов берётся в виде

где L медленно меняется на бесконечности, а параметр γ определяет скорость убывания интенсивности. Такая модель обобщает как процессы с иммиграцией, зависящей от состояния (Дж. Фостер [2]), так и процессы с убывающей во времени однородной иммиграцией (И. С. Бадалбаев, И. Рахимов [3]), объединяя оба механизма.

Основной результат. Установлено функциональное уравнение

связывающее производящую функцию процесса с -мерной итерацией производящей функции размножения $f(t,s)$ и множителем, отвечающим ψ_t. На

его основе доказана теорема о предельном поведении вероятности невырождения:

1) если $0 < \gamma < 1$, то $t \cdot \mathrm{P}\{Z(t) \neq 0\} \to c(\gamma)$ при $t \to \infty$;

2) если $\gamma \geq 1$ и вторые моменты числа потомков конечны, то $\mathrm{P}\{Z(t) \neq 0\}$ убывает как $t^{-(1+\gamma)}$ с точностью до медленно меняющегося множителя,

где $c(\gamma) > 0$ зависит от γ и вторых моментов матрицы A.

Метод и новизна. Основной методический приём — сведение задачи к специально построенному вспомогательному процессу с обычной (не зависящей от состояния) неоднородной иммиграцией: между вероятностью вырождения исходного процесса $Z(t)$ и предельным распределением вспомогательного процесса устанавливается точное соответствие, что позволяет перенести на модель с зависящей от состояния убывающей иммиграцией предельные теоремы, известные для процессов с обычной неоднородной иммиграцией [2, 3]. Работа *впервые* систематически исследует многотипный критический процесс, в котором зависимость иммиграции от состояния (включение только из нуля) и убывание её интенсивности во времени рассматриваются *одновременно*, и показывает, что скорость вырождения процесса определяется взаимодействием этих двух эффектов, а не только каждым из них по отдельности.

Литература

1. Севастьянов Б. А., Зубков А. М. Регулируемые ветвящиеся процессы // Теория вероятн. и её примен. — 1974. — Т. 19, № 1. — С. 15–25.
2. Foster J. H. A limit theorem for a branching process with state-dependent immigration // Ann. Math. Statist. — 1971. — V. 42, № 5. — P. 1773–1776.
3. Бадалбаев И. С., Рахимов И. Новые предельные теоремы для многотипных ветвящихся процессов с иммиграцией убывающей интенсивности // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1982. — № 2.

4. Рахимов И., Каверин С. В. Класс предельных распределений критических ветвящихся процессов с убывающей иммиграцией, зависящей от состояния // Докл. АН УзССР. — 1986. — № 1. — С. 4–6.