КЕЧИКИШЛИ ГЛЮКОЗА–ИНСУЛИН МОДЕЛИДА ПАРАМЕТРЛАР СЕЗГИРЛИГИНИНГ МАТЕМАТИК ТАҲЛИЛИ ВА ЯНГИ ТАДҚИҚОТ ЙЎНАЛИШИ

Аминов Феруз Ҳамид ўғли,
Бухоро давлат университети,
таянч докторанти (PhD).
ORCID: 0009-0002-4100-4043
f.h.aminov@buxdu.uz

Аннотация

Ушбу тезисда M. Bachar томонидан таклиф этилган кечикишли глюкоза–инсулин моделининг параметрларга сезгирлиги математик нуқтаи назардан таҳлил қилинади [1]. Асосий эътибор кечикишли дифференциал тенгламалар системаси учун сезгирлик функцияларини ҳосил қилиш, Fréchet ҳосиласи ва Fisher ахборот матрицаси орқали параметрларнинг идентификацияланиш даражасини баҳолашга қаратилган. Мақоладаги ёндашув асосида параметр сезгирлиги, параметрлар орасидаги боғлиқлик ва идентификация муаммосини ягона математик мезон орқали тадқиқ этиш янги йўналиш сифатида таклиф этилади.

Калит сўзлар: кечикишли дифференциал тенглама, глюкоза–инсулин модели, сезгирлик функцияси, Fréchet ҳосиласи, Fisher ахборот матрицаси, идентификация, параметр корреляцияси.

Глюкоза ва инсулин динамикаси физиологик жараёнлардаги вақт кечикишларини ҳисобга олган ҳолда кечикишли дифференциал тенгламалар орқали ифодаланиши мумкин. Bachar [1] модели умумий ҳолда

кўринишда берилган бўлиб, бу ерда

— глюкоза ва инсулин ҳолат ўзгарувчилари, $p = (p_1, p_2, \ldots, p_{\mathrm{m}})^{\mathrm{T}}$ —

модел параметрлари, τ_1 ва τ_2 — кечикиш параметрларидир [1].

Моделнинг асосий математик хусусияти шундан иборатки, ҳозирги ҳолат x(t) билан бирга олдинги ҳолатлар $x(t-\tau_1)$ ва $x(t-\tau_2)$ ҳам динамикага таъсир қилади.

Кечикишнинг максимал қиймати

орқали аниқланади ва бошланғич тарих функцияси

кўринишда берилади [1].

Шундай қилиб, мазкур модель оддий дифференциал тенглама эмас, балки функционал фазода аниқланадиган динамик система ҳисобланади.

Модел натижасининг параметрга сезгирлиги қуйидаги ҳосила орқали аниқланади:

Барча параметрлар бўйича сезгирликлар матрицаси

кўринишга эга.

Бу матрица параметрдаги кичик ўзгаришнинг модел ҳолатига таъсирини миқдорий ифодалайди [1].

Kechikishli sistema uchun parametr bo‘yicha differensiallash natijasida sezgirlik tenglamasi

кўринишни олади.

Бу ерда:

Бошланғич сезгирлик функцияси, агар бошланғич ҳолат параметрга боғлиқ бўлмаса,

шартни қаноатлантиради [1].

Шу ерда асосий математик масала пайдо бўлади: параметрлар сони ортган сари $S(t)$ матрицанинг устунлари бир-бирига яқинлашиши мумкин. Бу эса параметрларни алоҳида аниқлашни қийинлаштиради.

Нормаллаштирилган сезгирлик

орқали аниқланади.

У параметрларни турли масштабларда объектив таққослаш имконини беради.

Параметрларни баҳолаш масаласини энг кичик квадратлар функционали орқали ёзиш мумкин:

Бу ерда $\hat{G}(t)$ — экспериментал ёки кузатилган глюкоза маълумоти.

Параметрларнинг маълумотлар орқали ажратилиш даражасини сезгирлик матрицаси ёрдамида

Fisher ахборот матрицаси орқали баҳолаш мумкин [1].

Агар F матрицанинг айрим хос қийматлари жуда кичик бўлса, параметрларни идентификация қилиш масаласи ёмон шартланган бўлади.

Хос қийматлар

тартибда жойлаштирилса, катта λ_i қийматларга мос параметрлар модел натижасига кучлироқ таъсир қилади.

Bachar [1] ҳисоблашларида барча параметрларни бир вақтда идентификация қилиш самарасиз бўлган, сезгир параметрларни ажратиб олиш эса хатони кескин камайтирган. Хусусан, барча параметрлар билан баҳолашда хато нормаси 2.8877×10^{3} бўлган бўлса, сезгир параметрлар танланганда 7.6993×10^{-3} гача камайган [1].

Бу натижа муҳим математик хулосани беради:

барча параметрларни эмас, балки динамикага энг катта таъсир қилувчи параметрлар тўпламини идентификация қилиш мақсадга мувофиқ.

Биз ушбу натижадан кейинги тадқиқот учун қуйидаги масалани таклиф қиламиз:

параметр сезгирлиги ва параметрлар орасидаги боғлиқликни битта математик мезон орқали биргаликда баҳолаш.

Бунинг учун ҳар бир параметрнинг интеграл сезгирлик даражасини кўринишда киритишни таклиф этамиз.

Бу катталик параметрнинг бутун кузатув интервалидаги таъсирини баҳолайди.

Бироқ юқори сезгирликнинг ўзи параметрни ишончли идентификация қилиш учун етарли эмас. Икки параметрнинг сезгирлик функциялари бир-бирига яқин бўлиши мумкин.

Шу сабабли параметрлар ўртасидаги боғлиқликни

коэффициент орқали баҳолашни таклиф қиламиз.

Агар

бўлса, i ва j параметрларнинг модел чиқишига таъсири деярли бир хил бўлиб, уларни маълумотлар асосида алоҳида идентификация қилиш қийинлашади.

Шу асосда янги тадқиқот мезони сифатида

кўринишдаги рейтингни ўрганиш таклиф этилади, бу ерда R_j — j параметрнинг бошқа параметрлар билан боғлиқлик даражасини ифодаловчи катталик.

Бу ердаги асосий ғоя:

юқори сезгирлик + паст параметрлараро боғлиқлик = ишончли идентификация учун устувор параметр.

Кейинги босқичда ушбу мезоннинг Fisher матрицаси хос қийматлари билан боғлиқлиги ўрганилади. Натижада қуйидаги математик занжирни асослаш мақсад қилинади:

параметр сезгирлиги → параметрлараро боғлиқлик → идентификацияланиш → моделнинг барқарорлиги.

Мазкур ёндашув кейинчалик теорема ва леммалар шаклида асосланиши, хусусан, сезгирлик матрицасининг рангги, Fisher матрицасининг шартланганлик

сони ва параметрларнинг идентификацияланиш шарти ўртасидаги боғланишни аниқлаш имконини бериши мумкин.

ХУЛОСА

Кечикишли глюкоза–инсулин моделида параметр сезгирлиги Fréchet ҳосиласи ва сезгирлик тенгламалари орқали қатъий математик шаклда ифодаланади [1]. Fisher ахборот матрицаси параметрларни саралаш ва идентификация масаласининг ёмон шартланганлигини баҳолаш имконини беради.

Ушбу тезисдаги асосий янги тадқиқот йўналиши — **параметрнинг интеграл сезгирлиги ва параметрлараро корреляциясини биргаликда ҳисобга олиб, идентификация учун устувор параметрларни аниқлаш мезонини ишлаб чиқиш**.

Кейинги тадқиқотда ушбу мезоннинг математик асослари, унинг Fisher матрицаси хос қийматлари билан боғлиқлиги ҳамда кечикиш параметрларига нисбатан барқарорлиги назарий жиҳатдан текширилади. Бу ёндашув глюкоза–инсулин моделини CGM маълумотлари асосида параметрлаш ва моделни кам ўлчамли шаклга келтириш учун математик асос бўлиши мумкин.

АДАБИЁТЛАР

1. Bachar M. Sensitivity analysis for a delay mathematical model: the glucose-insulin model // Frontiers in Applied Mathematics and Statistics. — 2025. — Vol. 11. — Article 1562636. — DOI: 10.3389/fams.2025.1562636.

2. Bergman R.N. Origins and history of the minimal model of glucose regulation // Frontiers in Endocrinology. — 2021. — Vol. 11. — Article 583016. — DOI: 10.3389/fendo.2020.583016.

3. Banks H.T., Bortz D.M. A parameter sensitivity methodology in the context of HIV delay equation models // Journal of Mathematical Biology. — 2005. — Vol. 50. — P. 607–625. — DOI: 10.1007/s00285-004-0299-x.

4. Kappel F. Generalized sensitivity analysis in a delay system // Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. — 2007. — Vol. 7. — P. 1061001–1061002. — DOI: 10.1002/pamm.200700458.

1. Dalla Man C., Rizza R.A., Cobelli C. Meal simulation model of the glucose-insulin system // IEEE Transactions on Biomedical Engineering. – 2007. – Vol. 54, No. 10. – P. 1740–1749. – DOI: 10.1109/TBME.2007.893506.

2. Li J., Kuang Y., Mason C.C. Modeling the glucose–insulin regulatory system and ultradian insulin secretory oscillations with two explicit time delays // Journal of Theoretical Biology. – 2006. – Vol. 242, No. 3. – P. 722–735. – DOI: 10.1016/j.jtbi.2006.04.002.

3. Makroglou A., Li J., Kuang Y. Mathematical models and software tools for the glucose-insulin regulatory system and diabetes: an overview // Applied Numerical Mathematics. – 2006. – Vol. 56, No. 3–4. – P. 559–573. – DOI: 10.1016/j.apnum.2005.04.023.

4. Ajmera I., Swat M., Laibe C., Novere N.L., Chelliah V. Mathematical modeling of the glucose–insulin system: A review // Mathematical Biosciences. – 2013. – Vol. 244, No. 2. – P. 69–81. – DOI: 10.1016/j.mbs.2013.05.006.

5. Cobelli C., Dalla Man C., Toffolo G., Basu R., Vella A., Rizza R. The oral minimal model method // Diabetes. – 2014. – Vol. 63, No. 4. – P. 1203–1213. – DOI: 10.2337/db13-1198.

6. Dalla Man C., Caumo A., Cobelli C. The oral glucose minimal model: estimation of insulin sensitivity from a meal test // IEEE Transactions on Biomedical Engineering. – 2002. – Vol. 49, No. 5. – P. 419–429. – DOI: 10.1109/10.995680.