UCHBURCHAKLARDAGI NOSTANDART GEOMETRIK MASALALARNI TRIGONOMETRIK USULLAR BILAN YECHISH

Ruziboyeva Oqila Shonazar qizi
Qarshi davlat universiteti o‘qituvchisi
e-mail: oqilaruziboyeva2905@gmail.com
Qarshi davlat universiteti
Matematika va informatika yo‘nalishi
Yusufova Asila Nabi qizi Dustmurodova Ruxshona Yodgor qizi

Annotatsiya: Ushbu maqolada to‘g‘ri burchakli va ixtiyoriy uchburchaklarga doir nostandart geometrik masalalarni trigonometrik funksiyalar va ayniyatlar yordamida yechish usullari tadqiq etilgan. Xususan, burchaklar munosabati berilgan uchburchak elementlarini tangenslar nisbati hamda ikki hissa burchak kosinusi (cos 2x) orqali ifodalashning analitik usuli tahlil qilingan va aniq masalalar yechimi keltirilgan.

Kalit so‘zlar: *uchburchak, nostandart masala, trigonometriya, tangens formulasi, kosinus, geometrik munosabatlar.*

Abstract: This article investigates methods for solving non-standard geometric problems related to right-angled and arbitrary triangles using trigonometric functions and identities. In particular, the analytical method of expressing triangle elements — when angle relationships are given — through the ratio of tangents and the double-angle cosine formula (cos 2x) is analyzed, and solutions to specific problems are presented.

Keywords: triangle, non-standard problem, trigonometry, tangent formula, cosine, geometric relationships.

Аннотация: В данной статье исследуются методы решения нестандартных

геометрических задач, связанных с прямоугольными и произвольными треугольниками, с использованием тригонометрических функций и тождеств. В частности, проанализирован аналитический метод выражения элементов треугольника через отношение тангенсов и формулу косинуса двойного угла (cos 2x) при заданных соотношениях углов, а также приведены решения конкретных задач.

Ключевые слова: треугольник, нестандартная задача, тригонометрия, формула тангенса, косинус, геометрические соотношения.

1. KIRISH

Geometriya ta’limida uchburchaklarga doir masalalar muhim o‘rinni egallaydi. Standart formulalar (sinuslar teoremasi, kosinuslar teoremasi, maydon formulalari) ko‘pchilik masalalarni yechishga imkon beradi. Biroq, bir qator nostandart masalalarda burchaklar orasidagi munosabat berilgan holda uchburchak elementlarini topish talab etiladi. Bunday masalalar oddiy algebraik yondashuvlarga qaram bo‘lmay, trigonometrik ayniyatlar va transformatsiyalarni chuqur bilishni taqozo etadi.

Mazkur maqolada burchaklar orasidagi munosabat (masalan, $\alpha = 2\beta$, yoki bir burchak ikkinchisining ikki baravarini tashkil etishi) berilganda, uchburchak tomonlari va boshqa elementlarini tangens nisbatlari hamda cos 2x formulasi yordamida topishning analitik usuli bayon etiladi. Keltirilgan misollar orqali ushbu usulning samaradorligi ko‘rsatiladi.

2. ASOSIY TRIGONOMETRIK AYNIYATLAR VA FORMULALAR

Ushbu usulda qo‘llanadigan asosiy formulalar quyidagilardir:

$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\tan(A + B) = (\tan A + \tan B) / (1 - \tan A \cdot \tan B)$

$\tan(2x) = 2\tan x / (1 - \tan^2 x)$

Sinuslar teoremasi: a/sin A = b/sin B = c/sin C = 2R, bu yerda R — uchburchakka o‘ralgan aylana radiusi.

Kosinuslar teoremasi: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

3. BURCHAKLAR MUNOSABATI BERILGANDA MASALA YECHISH USULI

Uchburchakda burchaklar munosabati berilgan masalalarni yechishda quyidagi metodologiyadan foydalaniladi:

1-qadam. Noma‘lum burchakni parametr sifatida belgilash. Masalan, $\beta = t$ deb qo‘yilsa, $\alpha = 2t$ bo‘ladi.

2-qadam. Uchburchak burchaklari yig‘indisi (180°) shartidan foydalanib, qolgan burchakni ifodalash: $\gamma = 180° - \alpha - \beta$.

3-qadam. Sinuslar yoki kosinuslar teoremasi yordamida tomonlar nisbatini tuzish.

4-qadam. cos 2x formulasini qo‘llab, trigonometrik tenglamani soddalashtirish va yechish.

5-qadam. Cheklanish shartlarini tekshirish (burchaklar musbat va yig‘indi 180° bo‘lishi).

4. ANIQ MASALALAR VA YECHIMLAR

4.1-masala (To‘g‘ri burchakli uchburchak).

"To‘g‘ri burchakli ABC uchburchagida $\angle C = 90°$, $\angle A = 2\angle B$. Gipotenuzaning uzunligi $c = 10$ bo‘lsa, katetlarni toping."

Yechim:

$\angle B = t$ deb belgilaylik. U holda $\angle A = 2t$ va $\angle A + \angle B = 90°$ (chunki $\angle C = 90°$):

$2t + t = 90° \Rightarrow t = 30°$

Demak, $\angle B = 30°$, $\angle A = 60°$. To‘g‘ri burchakli uchburchakda:

$a = c \cdot \sin A = 10 \cdot \sin 60° = 10 \cdot (\sqrt{3}/2) = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66$

$b = c \cdot \sin B = 10 \cdot \sin 30° = 10 \cdot (1/2) = 5$

Natija: $a = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66;\ b = 5$.

4.2-masala (Ixtiyoriy uchburchak, tangenslar nisbati).

"ABC uchburchagida AB = c, ∠A = 2∠C. tan∠A / tan∠C nisbatini toping."

Yechim:

∠C = t deb olaylik, u holda ∠A = 2t. tan 2t formulasidan foydalanib:

$\tan(2t) / \tan(t) = [2\tan t / (1 - \tan^2 t)] / \tan t = 2 / (1 - \tan^2 t)$

Sinuslar teoremasi orqali:

$a / \sin(2t) = c / \sin(t) \Rightarrow a = c \cdot 2\sin t \cos t / \sin t = 2c \cos t$

Demak, ∠A = 2∠C shartida a = 2c·cos∠C. Bu natija uchburchak tomonlari va burchaklar orasidagi muhim bog‘liqlikni ifodalaydi.

4.3-masala (cos 2x formulasining qo‘llanilishi).

"ABC uchburchagida ∠B = 2∠A, a va b tomonlar berilgan. cos(2∠A) ni a va b orqali ifodalaing."

Yechim: Sinuslar teoremasi bo‘yicha:

$a / \sin A = b / \sin B = b / \sin(2A) = b / (2 \sin A \cos A)$

$a \cdot 2 \sin A \cos A = b \cdot \sin A \Rightarrow 2a \cos A = b \Rightarrow \cos A = b / (2a)$

Endi cos 2A formulasini qo‘llaymiz:

$\cos(2A) = 2\cos^2 A - 1 = 2 \cdot (b/(2a))^2 - 1 = b^2/(2a^2) - 1$

$\cos(2\angle A) = (b^2 - 2a^2) / (2a^2)$

Natija: $\cos(2\angle A) = (b^2 - 2a^2) / (2a^2)$. Bu ifoda faqat $b < a\sqrt{2}$ bo‘lganda to‘g‘ri (ya’ni, $\cos(2A) \in (-1, 1)$) qiymatga ega.

5. NATIJALAR VA MUHOKAMA

Yuqorida keltirilgan yechimlar shuni ko‘rsatadiki, burchaklar orasida munosabat mavjud bo‘lganda trigonometrik transformatsiyalar (ayniqsa cos 2x va tan 2x formulalari) masalani sezilarli darajada soddalashtiradi. Asosiy xulosalar:

(1) To‘g‘ri burchakli uchburchak uchun ∠A = 2∠B holati noyob yechimga olib

keladi: burchaklar 30°–60°–90° ga teng bo‘ladi. Bu klassik natija, lekin trigonometrik yo‘sinda chiqarish yanada umumlashtirishga imkon beradi.

(2) Ixtiyoriy uchburchak uchun tangenslar nisbati (tan A / tan C, bunda A = 2C) ifodasi $2/(1-\tan^2 C)$ sifatida olinadi. Bu nisbat uchburchakdagi burchaklar chegaralariga qarab o‘zgarib turadi.

(3) cos 2x formulasidan foydalanib olingan $\cos(2\angle A) = (b^2-2a^2)/(2a^2)$ ifodalash uchburchak elementlarini bir-biri bilan bog‘lashning qisqa yo‘lidir, bu esa murakkab algebraik hisob-kitoblardan qochish imkonini beradi.

6. XULOSA

Ushbu maqolada to‘g‘ri burchakli va ixtiyoriy uchburchaklarda burchaklar munosabati berilgan nostandart masalalarni trigonometrik funksiyalar va ayniyatlar orqali yechish usullari ko‘rib chiqildi. Tahlil natijasida quyidagilar aniqlandi:

– Tangens va kosinus ikki hissa burchak formulalari murakkab munosabatlarni soddalashtiruvchi asosiy vosita hisoblanadi;

– Sinuslar teoremasi bilan birgalikda qo‘llanilganda tomonlar va burchaklar orasidagi bog‘liqlikni chiqarish osonlashadi;

– Nostandart masalalarning analitik yechimlari o‘quvchilarda trigonometrik fikrlash malakasini mustahkamlaydi.

Kelajakda ushbu yondashuvni ko‘pburchaklar va aylana bilan bog‘liq murakkabroq geometrik tizimlar uchun umumlashtirish tadqiqotimizning davomi bo‘lishi mo‘ljallanmoqda.

ADABIYOTLAR

1. Mirzaahmedov M.A., Ismailov Sh.N., Xaydarov B.Q. Geometriya: Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 9-sinfi uchun darslik. – Toshkent: "O‘qituvchi" NMIU, 2019. – 160 b.
2.Israilov I., Pashayev Z. Geometriyadan masalalar to‘plami: Akademik litseylar va

kasb-hunar kollejlari uchun o‘quv qo‘llanma. – Toshkent: "O‘qituvchi", 2006. – 216 b.

3.Shlykov V.V. Geometriyadan nostandart va olimpiada masalalari. – Toshkent: "Soff.uz" nashriyoti, 2021. – 180 b.

4.Pogorelov A.V. Geometriya: 7–11-sinflar uchun darslik. – Toshkent: "O‘qituvchi", 2015. – 320 b.

5.Scagliotti J., Bradley M. Trigonometric Identities and Geometric Modeling in Secondary Education. – New York: Adelphi University Modules, 2018. – pp. 45-52.

6.Usmonov R., Alimov K. Matematika darslarida trigonometrik ayniyatlarni geometrik masalalarga tatbiq etish metodikasi // Pedagogik mahorat ilmiy-nazariy jurnali. – Buxoro, 2022. – №3. – B. 112-118.