WORLD CONFERENCE ON STUDENT - CENTERED LEARNING APPROACHES

МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Shamuratov Elyor Alimboyevich – UrDU, *Mexanika va matematik injiniring kafedrasi*shamuratovelyor68@gmail.com

Madraximov Temur Rustambekovich – UrDU, *Matematik tahlil kafedrasi*temurmadraximov1995@gamail.com

Axmedov Qurbonbay Yuldashboyevich – UrDU, *Matematik tahlil kafedrasi*axmedovqurbonbay@gamail.com

Аннотация. В данной работе исследуется задача Коши для системы Захарова-Шабата, связанной с нелинейным уравнением Шредингера (nNLS) с простым самосогласованным источником. При условии, что оператор не имеет спектральных особенностей и все его собственные значения являются простыми, с использованием представления Лакса получена временная эволюция данных рассеяния как для непрерывного, так и для дискретного спектров. Найденные эволюционные соотношения позволяют применить метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) и восстановить потенциал с помощью интегрального уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко, что дает возможность построить точное решение рассматриваемой начальной задачи.

Ключевые слова: система Захарова-Шабата, метод обратной задачи рассеяния (МОЗР), нелинейное уравнение Шредингера (nNLS) с самосогласованным источником, задача Коши, эволюция данных рассеяния, уравнение Гельфанда-Левитана-Марченко, представление Лакса, решения Йоста.

Введение

Нелинейные эволюционные уравнения и методы поиска их решений являются одним из важнейших направлений современной математической

физики. В частности, интегрируемые уравнения с самосогласованным источником адекватно описывают множество сложных волновых процессов, возникающих в физике плазмы, нелинейной оптике, акустике и физике твердого тела. При аналитическом решении задач этого класса метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) широко используется как один из наиболее эффективных и фундаментальных математических инструментов.

В данной работе исследуется задача Коши, поставленная для системы нелинейных уравнений Шредингера (nNLS) с простым самосогласованным источником. Основная цель работы — анализ прямой и обратной задач рассеяния для системы Захарова-Шабата, потенциал которой является решением рассматриваемой задачи, а также определение временной эволюции данных рассеяния.

При условии, что оператор не имеет спектральных особенностей и все его собственные значения являются простыми, изучены асимптотические свойства решений Йоста. С использованием представления Лакса выведены уравнения эволюции данных рассеяния для непрерывного и дискретного спектров. Полученные результаты позволяют полностью восстановить потенциал с помощью интегрального уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко и, в свою очередь, открывают путь к построению точных решений исследуемой задачи Коши.

Постановка задачи

В данном работе рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} \mu_x = (u \cdot u^*)_t, \\ iu_{xt} + 2\mu u + iu_x = i\sum\limits_{k=1}^{N} (\Phi_{k_1}^2 - \Phi_{k_2}^{*\,2}), \\ L\Phi_k = \xi_k \Phi_k, \qquad k = 1,2,\ldots,2N, \qquad x \in R \end{cases} \tag{1}$$

при начальном условии

$u(x,0)=u_0(x), \quad x\in R, (2)$

где начальная функция $u_0(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ обладает следующими свойствами:

1) $\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)|u_0(x)|dx<\infty,$

2) Оператор $L(0)=i\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & -u_0(x)\\ -u^*{}_0(x) & -\frac{\partial}{\partial x}\end{pmatrix}$ не имеет спектральных особенностей и имеет ровно $2N$ простых собственных значений $\xi_1(0),\xi_2(0),...,\xi_{2N}(0)$. Здесь функция $u_0^*(x)$ является комплексным сопряжением функции $u_0(x)$.

А $\Phi_k=(\Phi_{k1}(x,t),\Phi_{k2}(x,t))^T$ - собственная вектор-функция оператора $L(t)=i\begin{pmatrix}\frac{d}{dx} & -u(x,t)\\ -u^*(x,t) & -\frac{d}{dx}\end{pmatrix}$, соответствующая собственному значению ξ_k. Для определённости будем предполагать, что в сумме участвующей в правой части (1) сначала идут члены с $\operatorname{Im}\xi_k>0,\ k=1,2,...,N$. Также предполагается, что

$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{k1}\Phi_{k2}dx=A_k(t), \qquad k=1,2,...,2N, (3)$

с заданными непрерывными, ненулевыми функциями $A_k(t)$, которые удовлетворяют условиям

$A_k(t)=A_n(t)$ при $\xi_k=-\xi_n.$

Пусть, функция $u=u(x,t)$ является комплексной и достаточно гладкой функцией x и t, для всех $t\geq 0$ удовлетворяет требованию

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left((1+|x|)(|u(x,t)|+|u_x(x,t)|)\right)dx<\infty, \quad (4)$$

$$\mu(x,t)\to 0, \qquad \text{при} \qquad x\to\pm\infty.$$

В данной работе получены эволюция данных рассеяния для системы Захарова-Шабата с потенциалом, являющимся решением рассматриваемой задачи Коши (1)-(4) для уравнения nNLS с простым самосогласованным сточником.

Лемма 1. Если вектор-функции $Y(x,\zeta)$ и $Z(x,\eta)$ являются решениями уравнений $LY=\zeta Y$ и $LZ=\eta Z$, то для их компонент справедливы равенства

Это лемма доказывается непосредственной проверкой.

Список литературы

1. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов: Метод обратной задачи*. — М.: Наука, 1980.
2. Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи*. — М.: Мир, 1987.
3. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. *Гамильтонов подход в теории солитонов*. — М.: Наука, 1986.
4. Мельников В.К. *Интегрирование нелинейных эволюционных уравнений с самосогласованным источником* // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1989. — Т. 53, № 3. — С. 581–606.
5. Зенчук П.Н. *Метод обратной задачи рассеяния для уравнений с самосогласованным источником* // Теоретическая и математическая физика. — 1998. — Т. 116, № 2. — С. 177–187.
6. Шабат А.Б. *Обратная задача рассеяния для системы дифференциальных уравнений* // Функциональный анализ и его приложения. — 1975. — Т. 9, Вып. 3. — С.