ELLIPS VA UNING TUZILISHI

Buxoro shahar 1-son texnikumi matematika fani o'qituvchisi

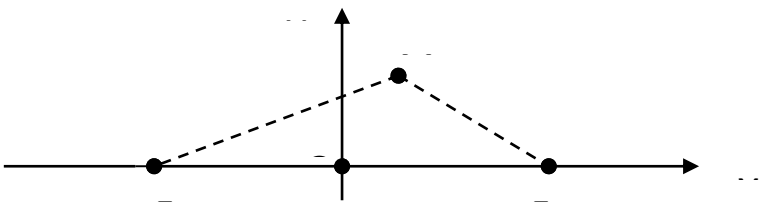
Muhamedova Munira Ramazonovna

Ellips va uning kanonik tenglamasi.

Dastlab ellips ta'rifini keltiramiz**.**

Berilgan ikkita F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalarining yig'indisi o'zgarmas songa teng bo'lgan tekislikdagi nuqtalarining geometrik o'rni ***ellips*** deb ataladi. Bunda F_1 va F_2 nuqtalar ellipsning ***fokuslari*** deyiladi.

Ta'rif bo'yicha ellips tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun F_1 va F_2 fokuslar orasidagi masofani $2c$, ellipsning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasidan fokuslarigacha bo'lgan masofalar yig'indisini $|MF_1|+|MF_2|=2a$ deb belgilaymiz. XOY Dekart koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz. OX o'qini F_1 va F_2 fokuslar orqali, OY o'qini esa fokuslar o'rtasidan o'tkazamiz (26-rasmga qarang). Bunda F_1 va F_2 fokuslar koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik joylashadi va, belgilashimizga asosan $|F_1F_2|=2c$ bo'lgani uchun, $|OF_1|=|OF_2|=c$ bo'ladi. Shu sababli bu fokuslar $F_1(-c,0)$ va $F_2(c,0)$ koordinatalarga ega bo'ladi.



Bu holda, ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan,

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}\ , \quad |MF_2| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

va, ellips ta'rifiga asosan,

$$|MF_1| + |MF_2| = \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a\,.$$

Bu tenglikni quyidagicha soddalashtiramiz:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [\sqrt{(x+c)^2+y^2}]^2 = [2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}]^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4a^2 - 4xc = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Rightarrow (a^2-xc)^2 = [a\sqrt{(x-c)^2+y^2}]^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^4 - 2a^2xc + (xc)^2 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2 \Rightarrow$$
$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2). \qquad (6)$$

Yuqoridagi chizmadagi F_1MF_2 uchburchakdan uchburchak tengsizligiga asosan

$$|MF_1|+|MF_2|>|F_1F_2| \Rightarrow 2a>2c>0 \Rightarrow a^2-c^2>0$$

Ekanligini ko'ramiz.

Shu sababli $a^2-c^2 = b^2$ deb belgilab olish mumkin. Bu belgilashda tenglama $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ ko'rinishga keladi. Bu tenglamani a^2b^2 ifodaga bo'lib, ushbu tenglamaga kelamiz:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = a^2 - c^2)$$

tenglama ellipsning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.

Ellips kanonik tenglamasini tahlil etib, uning xususiyatlarini aniqlaymiz.

Kanonik tenglamada ellipsga tegishli har bir $M(x,y)$ nuqtaning koordinatalari kvadrati bilan qatnashmoqda. Shu sababli $M_1(-x,y)$, $M_2(-x,-y)$ va $M_3(x,-y)$ nuqtalarning koordinatalari ham kanonik tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni bu nuqtalar ham ellipsga tegishli bo'ladi. Bundan OX va OY koordinata o'qlari ellips uchun simmetriya o'qlari bo'lishi kelib chiqadi.

tenglamaga $x=0$ yoki $y=0$ qiymatlarni qo'yib va bunda hosil bo'ladigan tenglamalarni yechib, mos ravishda ellipsning OX yoki OY koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz:

$$x=0\Rightarrow\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y^2=b^2\Rightarrow y=\pm b;\quad y=0\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}=1\Rightarrow x^2=a^2\Rightarrow x=\pm a.$$

Demak, ellips OX o'qini $A_1(-a,0)$ va $A_2(a,0)$, OY o'qini esa $B_1(0,-b)$ va $B_2(0,b)$ nuqtalarda kesib o'tadi. Bu nuqtalar ellipsning ***uchlari*** deyiladi. Ellips uchlari orasidagi $A_1A_2=2a$ va $B_1B_2=2b$ kesmalar mos ravishda ellipsning ***katta o'qi*** va ***kichik o'qi***, $OA_1=OA_2=a$ va $OB_1=OB_2=b$ esa uning ***katta yarim o'qi*** va ***kichik yarim o'qi*** deyiladi.

kanonik tenglamadan ellipsga tegishli ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtaning koordinatalari

$$\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}\le 1\Rightarrow x^2\le a^2\Rightarrow|x|\le a,\qquad \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\le 1\Rightarrow y^2\le b^2\Rightarrow|y|\le b$$

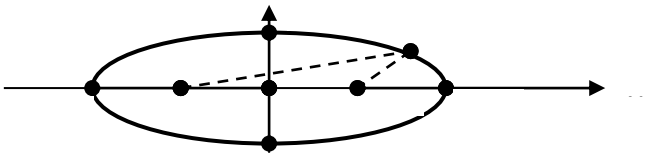
tengsizliklarni qanoatlantirishini ko'ramiz. Demak, ellips OX o'qi bo'yicha $x=\pm a$ vertikal, OY o'qi bo'yicha esa $y=\pm b$ gorizontal to'g'ri chiziqlar orasida joylashgan chegaralangan egri chiziqdan iborat bo'ladi.

✓ Koordinata o'qlari ellips uchun simmetriya o'qlari bo'lgani uchun uning grafigini faqat birinchi chorakda aniqlash kifoya. Bu yerda $x\ge 0$ va $y\ge 0$ bo'lgani uchun (7) tenglamadan unga teng kuchli bo'lgan

✓ $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

tenglamaga kelamiz.

Bunda $x \in [0;a]$ bo‘lib, x o‘zgaruvchining qiymati 0 dan a ga qarab oshib borganda, y o‘zgaruvchining qiymati b dan boshlab nolgacha kamayib boradi. Bu ma’lumot asosida dastlab ellips grafigini I chorakdagi qismini chizamiz, so‘ngra uni simmetriya asosida II, III va IV choraklarga davom ettirib, ellips grafigini quyidagi 1-rasmdagidek bo‘lishini topamiz:



Ellipsning xarakteristikalari**.**

Endi ellipsning ayrim xususiyatlarini ifodalovchi tushunchalar bilan tanishamiz.

Ellipsning fokuslari orasidagi $2c$ masofani uning katta o‘qi uzunligi $2a$ ga nisbati ellipsning ***ekssentrisiteti*** deb ataladi.

Ellipsning ekssentrisiteti ε kabi belgilanadi va ta’rifga hamda kanonik tenglamaga asosan

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad .$$

Bu formuladan $0 \le \varepsilon < 1$ ekanligi kelib chiqadi. Agar $\varepsilon = 0$ bo‘lsa, (8) formuladan $a=b$ ekanligini ko‘ramiz. Bu holda $a=b=R$ deb olsak, (7) kanonik tenglama $x^2+y^2=R^2$ ko‘rinishga keladi, ya’ni aylana tenglamasini ifodalaydi. Demak aylana ekssentrisiteti $\varepsilon=0$ bo‘lgan ellipsdan iborat, ya'ni ellipsning xususiy bir holi ekan. Shunday qilib ellipsning ekssentrisiteti ε qiymati bo‘yicha uning shakli haqida xulosa chiqarish mumkin. Bunda ε qiymati qanchalik nolga yaqin bo‘lsa, ellipsning shakli shunchalik “dumaloqroq” ; ε qanchalik birga yaqin bo‘lsa, ellipsning shakli shunchalik “cho‘zinchoqroq” bo‘ladi. Ellipsning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasidan uning F_1 va F_2 fokuslarigacha bo‘lgan $|MF_1|=r_1$ va $|MF_2|=r_2$ masofalar shu nuqtaning ***fokal radiuslari*** deyiladi.

Ellips ta’rifiga asosan $r_1+r_2 = 2a$ bo‘ladi. Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan

$$r_1 = |MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = |MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad .$$

Fokal radiuslarning bu ifodalarini kvadratga oshirib, so‘ngra hosil bo‘lgan ifodalarni hadma-had ayirib hamda $r_1+r_2 = 2a$ ekanligini eslab , r_1 va r_2 uchun ushbu tenglamalar sistemasiga kelamiz:

$$\begin{cases} r_1^2 - r_2^2 = 4cx \\ r_1 + r_2 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = 4cx \\ r_1 + r_2 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 - r_2 = \dfrac{2cx}{a} \\ r_1 + r_2 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 - r_2 = 2\varepsilon x \\ r_1 + r_2 = 2a \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasini yechib, fokal radiuslar uchun quyidagi formulalarni

olamiz:

$$r_1 = a + \varepsilon x \quad r_2 = a - \varepsilon x$$

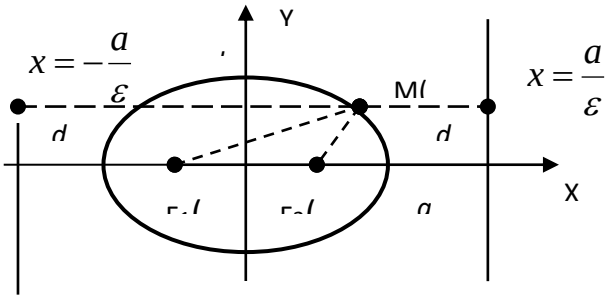
Tenglamasi $x=\pm\ a/\varepsilon$ bo‘lgan vertikal to‘g‘ri chiziqlar ellipsning ***direktrisalari*** deyiladi.

Ellipsning ixtiyoriy M(x,y) nuqtasidan uning $x=-a/\varepsilon$ va $x=a/\varepsilon$ direktrisalarigacha masofalarni mos ravishda d_1 va d_2 deb belgilaymiz. Quyidagi chizmadan ko‘rinadiki $d_1=(a/\varepsilon)+x$ va $d_2=(a/\varepsilon)-x$. Bu tengliklar va formulaga asosan quyidagi natijani olamiz:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a+\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}+x} = \varepsilon \frac{\frac{a}{\varepsilon}+x}{\frac{a}{\varepsilon}+x} = \varepsilon, \quad \frac{r_2}{d_2} = \frac{a-\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}-x} = \varepsilon \frac{\frac{a}{\varepsilon}-x}{\frac{a}{\varepsilon}-x} = \varepsilon \Rightarrow \quad \frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

Shunday qilib ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan uning OY o‘qiga nisbatan bir tomonda joylashgan fokusi va direktrisasigacha bo‘lgan masofalar nisbati o‘zgarmas son bo‘lib, doimo ε ekssentrisitetiga teng bo‘ladi.

Ellips va uning xarakteristikalari quyidagi rasmda ko‘rsatilgan.



Misol: $x^2+4y^2=4$ tenglama ellipsni ifodalashini ko‘rsating va uning barcha xarakteristikalarini toping.

Yechish: Dastlab berilgan tenglamani ikkala tomonini 4 soniga bo‘lamiz:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1.$$

Bu yerdan berilgan tenglama yarim o‘qlari $a=2$ va $b=1$ bo‘lgan ellipsni ifodalashini ko‘ramiz. Unda $c^2=a^2-b^2=3$ bo‘lgani uchun qaralayotgan ellipsning fokuslari $F_1(-\sqrt{3},0)$ va $F_2(\sqrt{3},0)$ nuqtalarda joylashganligini ko‘ramiz. Bu natijalardan foydalanib, ellipsning ekssentrisiteti va direktrisalarini topamiz:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ellipsga tegishli $M(x,y)$ nuqtaning fokal radiuslari

$$r_1=a+\varepsilon x=2+\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ r_2=a+\varepsilon x=2+\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

formulalar bilan topiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YXATI

1. Baxvalov . S. V., Modenov P. S., Parxomenko A. S. Analitik geometriyadan masalalar to‘plami. Toshkent, 2006, 546 bet.

2. Ильин В. А. Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. М., Наука, 1981, с. 232.

3. Pogorelov A. V. Analitik geometriya. Toshkent, 0 ‘qituvchi, 1983, 206-bet.

4. Постников М. М. Аналитическая геометрия. М., Наука, 1979. с. 336.

5. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. Санкт-Петербург - Москва, Изд. Лан’, 2003 г. стр. 336.